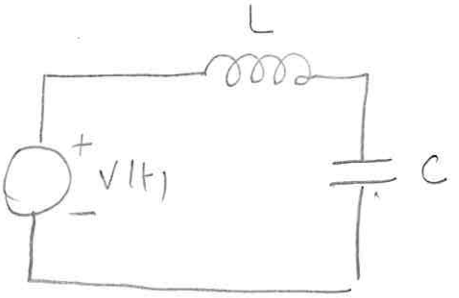
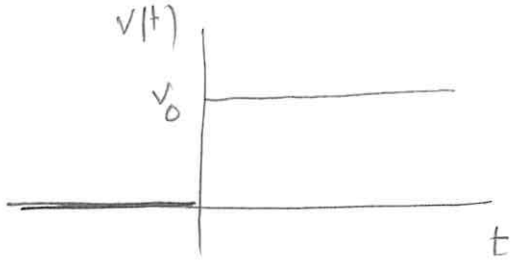
VAMOS AGORA ESTUDAR A MALHA LC.



COMECEMOS PELA RESPOSTA TEMPORAL: $V(t) = V_0 \, H(t)$



SEI QUE:

$$V(t) - L\frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = 0$$

PARA $t>0$ POSSO ESCREVER:

$$\underbrace{\frac{dV(t)}{dt}}_{=0} - L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} - \frac{1}{C}\,i(t) = 0$$

OU SEJA:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}\,i(t) = 0$$

ESTA EQUAÇÃO DIFERENCIAL TEM COMO SOLUÇÃO:

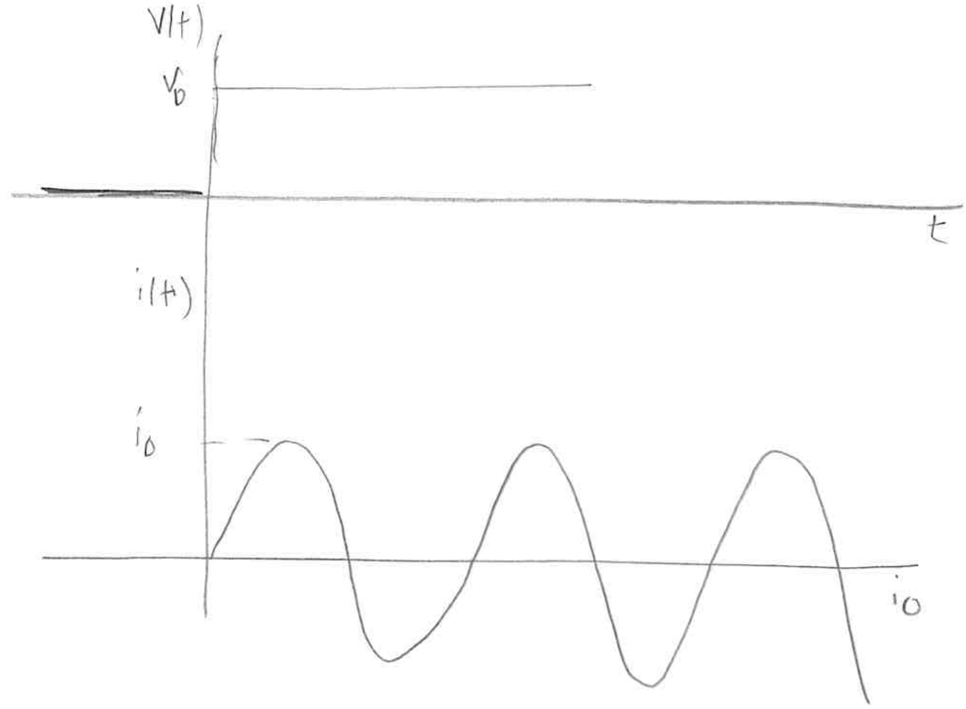
$$i(t) = i_0 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\,t + \phi\right)$$

DEFININDO $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ FICA:

$$i(t) = i_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

(i_0 e ϕ DEPENDEM DAS CONDIÇÕES INICIAIS)

ISTO QUER DIZER QUE UMA MALHA LC RESPONDE A UMA EXCITAÇÃO EM DEGRAU ENTRANDO EM OSCILAÇÃO COM UMA FREQUÊNCIA ANGULAR $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.



ESTRANHO ?

QUAL É O SISTEMA MECÂNICO QUE TEM TAMBÉM UM COMPORTAMENTO DESTE TIPO ?

ENERGIA POTENCIAL (C)

O SISTEMA MASSA-MOLA

ENERGIA CINÉTICA (L)

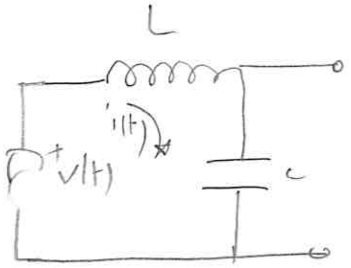
SE EU DESLOCAR RAPIDAMENTE O APOIO DA MOLA PARA CIMA (TENSÃO EM DEGRAU) A MASSA ENTRA EM OSCILAÇÃO COM UMA FREQUÊNCIA PRÓPRIA (ω_0)

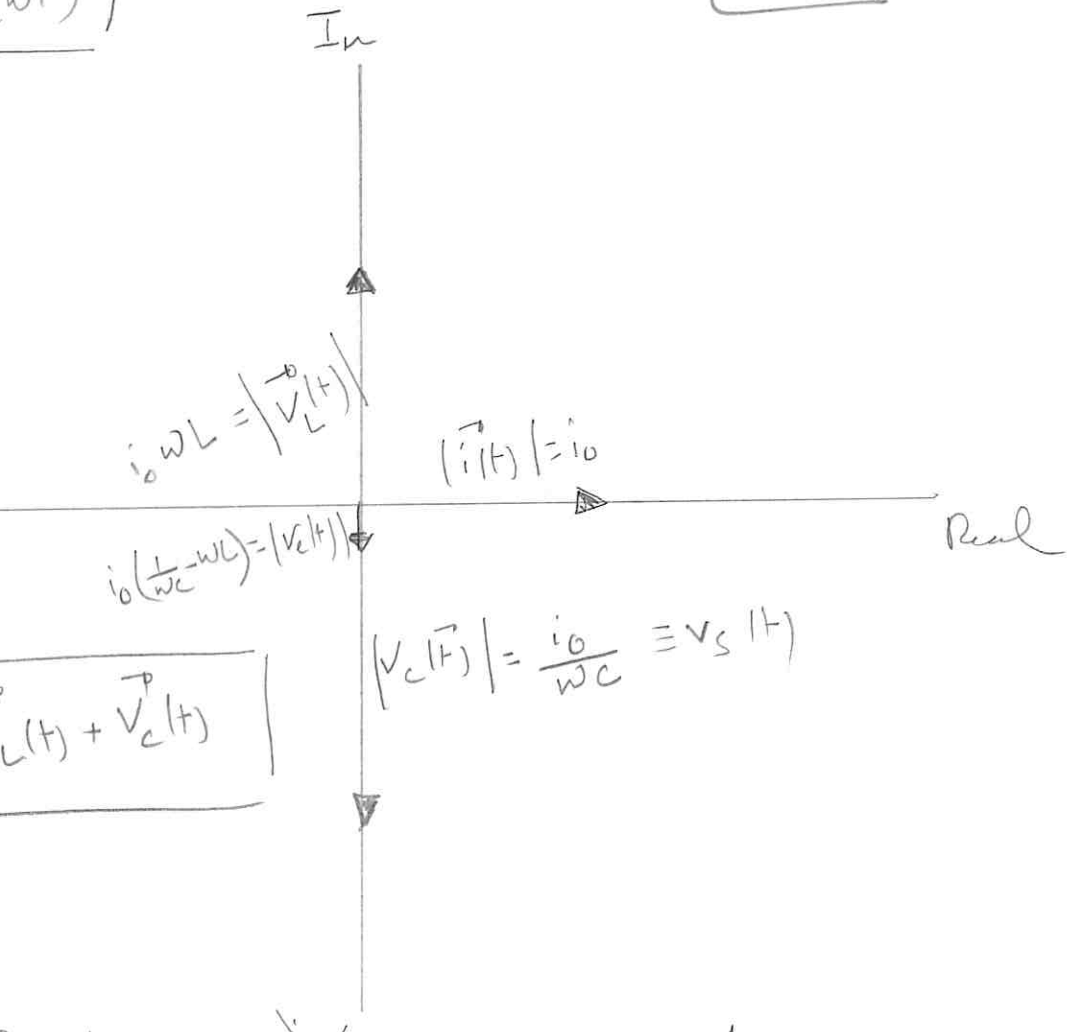
E COMO SE COMPORTA A MALHA LC EM RESPOSTA A UMA EXCITAÇÃO SINUSOIDAL?

USEMOS UM DIAGRAMA DE ARGAND

$$\boxed{i(t) = i_0 \, \text{sen}(\omega t)}$$

$\boxed{t = 0}$





$$\boxed{\vec{V}_e(t) = \vec{V}_L(t) + \vec{V}_C(t)}$$

$$f(\omega) = \frac{|\vec{V}_S(t)|}{|\vec{V}_e(t)|} = \frac{\cancel{i_0}/\omega C}{\cancel{i_0}\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|} = \frac{1}{|1 - \omega^2 LC|}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } \frac{1}{\omega C} > \omega L \\ \pi, & \text{se } \frac{1}{\omega C} < \omega L \end{cases}$$

VEJAMOS AGORA O QUE ACONTECE EM TRÊS SITUAÇÕES: QUANDO $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\omega \ll \omega_0$ E $\omega \gg \omega_0$

$$\boxed{\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L\cancel{C}}{C^{\cancel{2}}}} = \sqrt{L/C}$$

$$X_L = \omega_0 L = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times L = \sqrt{\frac{L^2}{\cancel{L}C}} = \sqrt{L/C}$$

PORTANTO, PARA $\omega = \omega_0$

$$X_L = X_C$$

ISTO QUER DIZER QUE POSSO TER $|\vec{V}_L(t)| = |\vec{V}_C(t)| \neq 0$ E, APESAR DISSO, $|\vec{V}_e(t)| = 0$!

OU SEJA, A RESPOSTA DO SISTEMA DIVERGE PARA $\omega = \omega_0$

DE FACTO,

$$f(\omega_0) = \frac{1}{1 - \omega_0^2 LC} = \frac{1}{\left| 1 - \underbrace{\frac{LC}{(\sqrt{LC})^2}}_{=1} \right|} = \infty$$

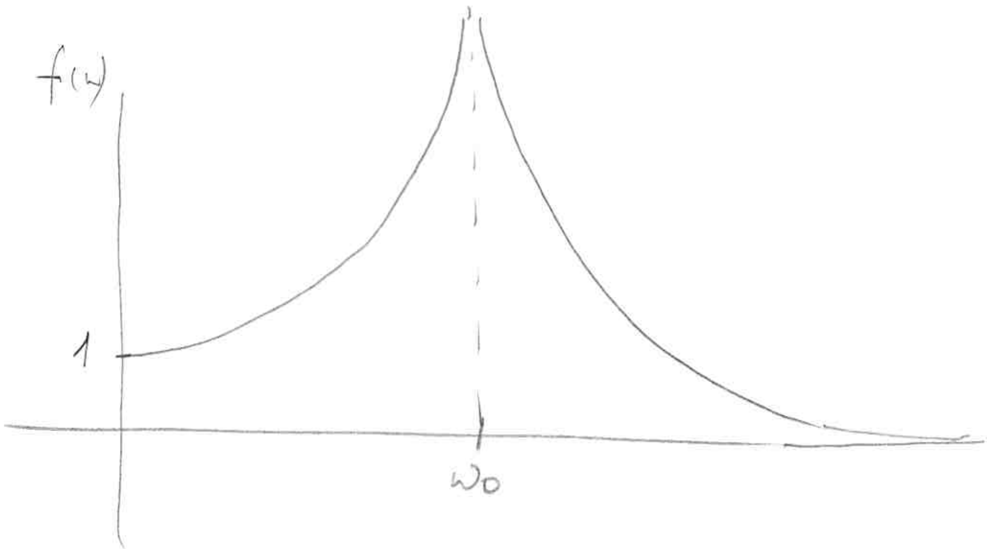
$$\boxed{\omega_0 \equiv \text{FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA DA MALHA } LC}$$

É TAMBÉM CLARO QUE:

$$\lim_{\omega \to 0} f(\omega) = \lim_{\omega \to 0} \frac{1}{|1 - \omega LC|} = 1$$

$$\lim_{\omega \to \infty} f(\omega) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{|1 - \omega LC|} = 0$$

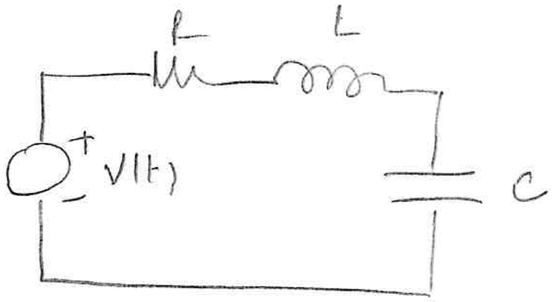
PORTANTO, $f(\omega)$ TERÁ A FORMA:



(É, ALIÁS, FÁCIL ENTENDER ISTO NO SISTEMA MASSA-MOLA)

ESTE CIRCUITO ASSEMELHA-SE PORTANTO A UM FILTRO PASSA-BANDA (USADO, POR EXEMPLO, EM SINTONIZADORES)

Vamos agora pensar na malha RLC



Comecemos pela resposta temporal, ou seja:

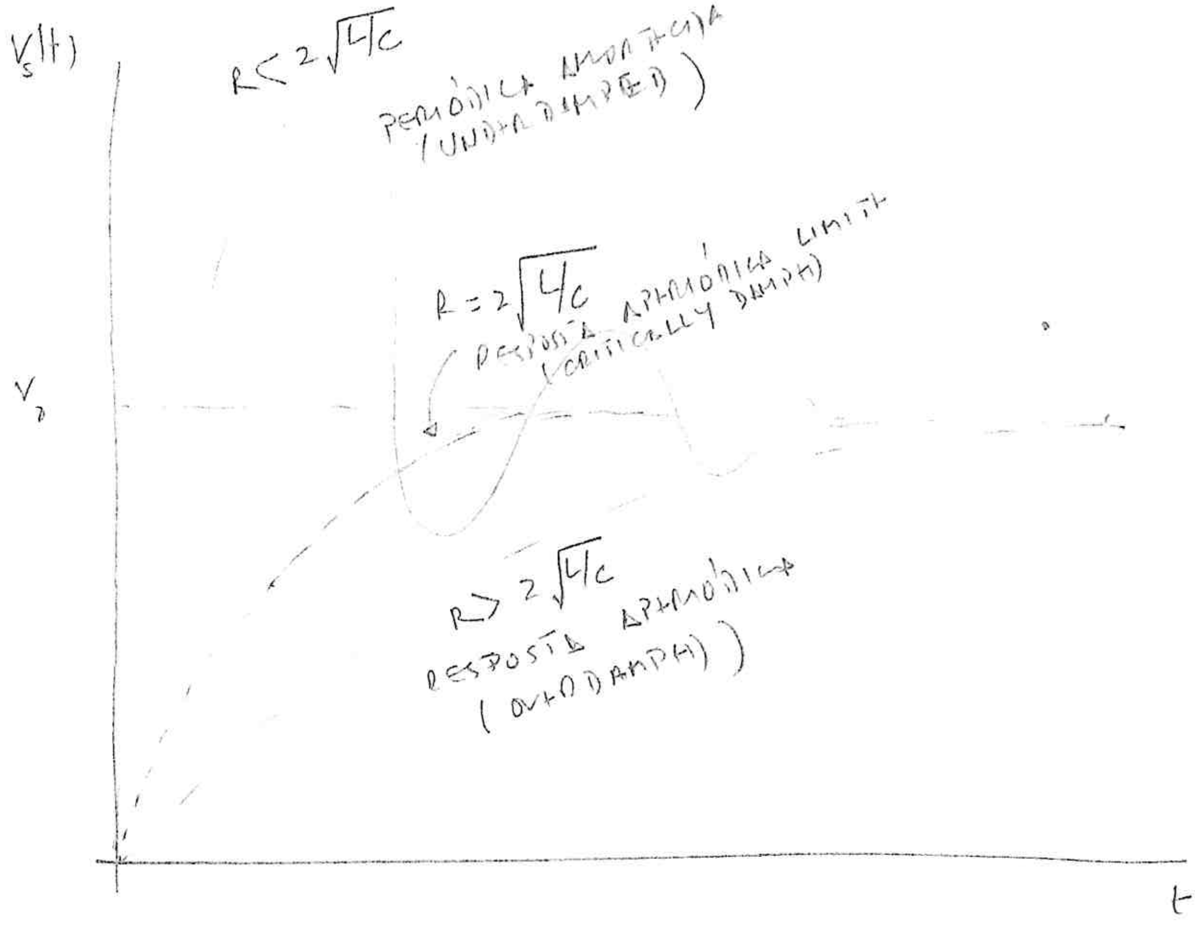
$$V(t) = V_0 \, H(t)$$

$$V(t) - R\,i(t) - L\frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = 0$$

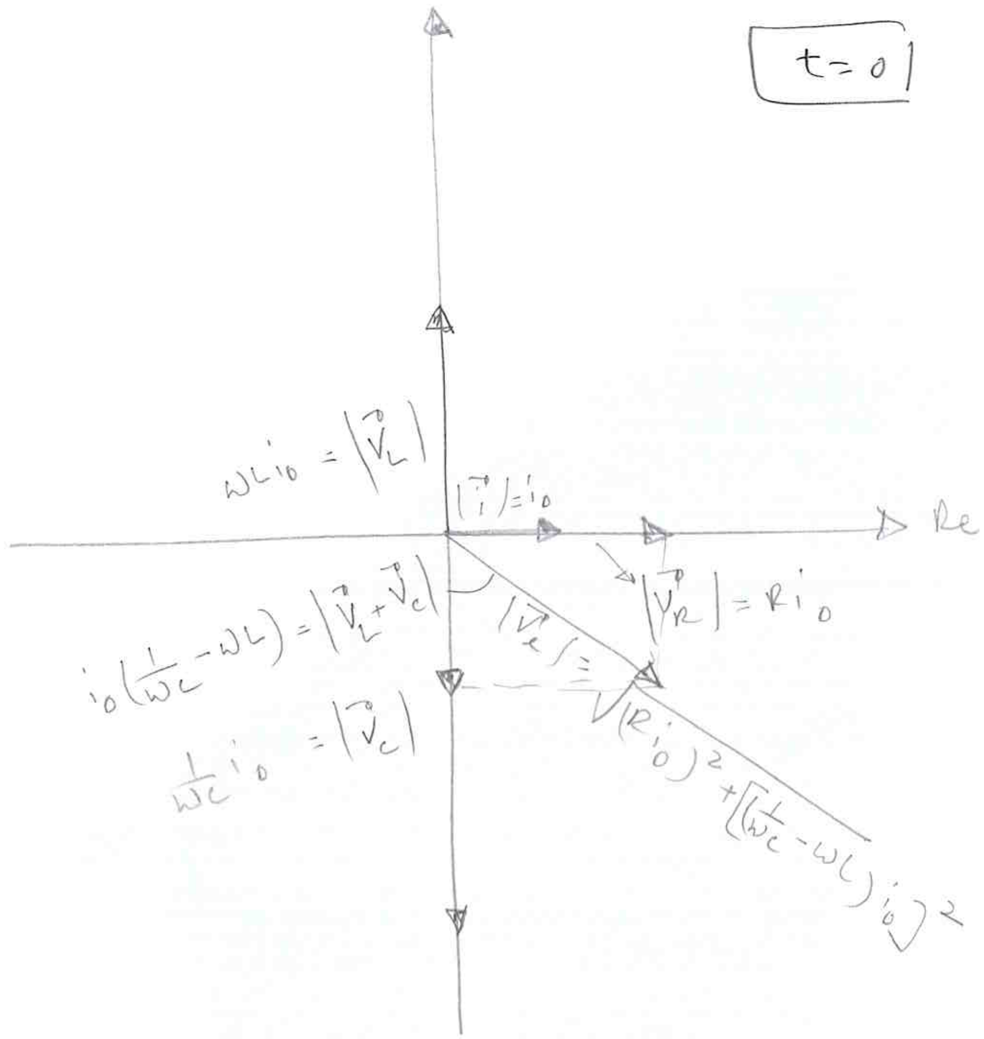
$$\underbrace{\frac{dV(t)}{dt}}_{0\ (t>0)} - R\frac{di(t)}{dt} - L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} - \frac{1}{C}\,i(t) = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2 i(t)}{dt} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}\,i(t) = 0}$$

(= circuito LC se R = 0!)

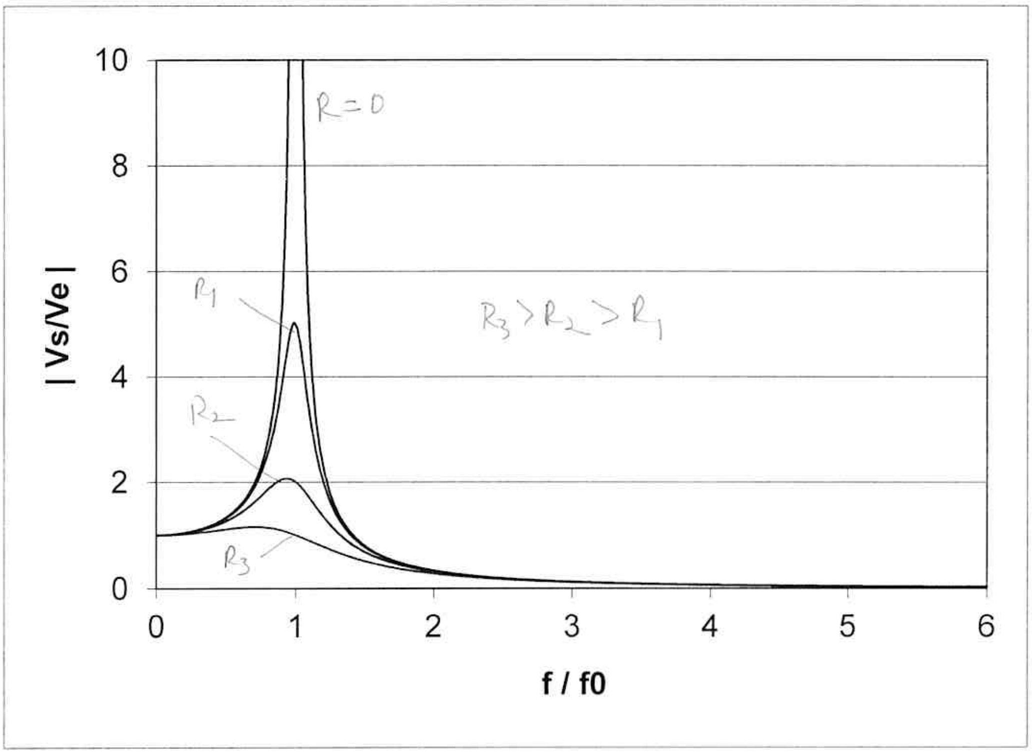


PENSEMOS AGORA NA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

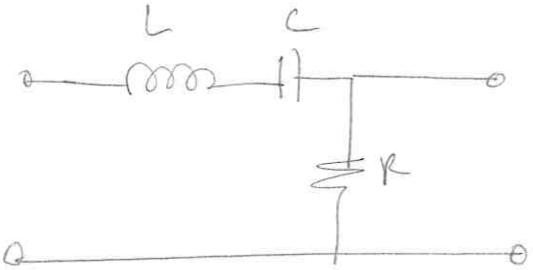


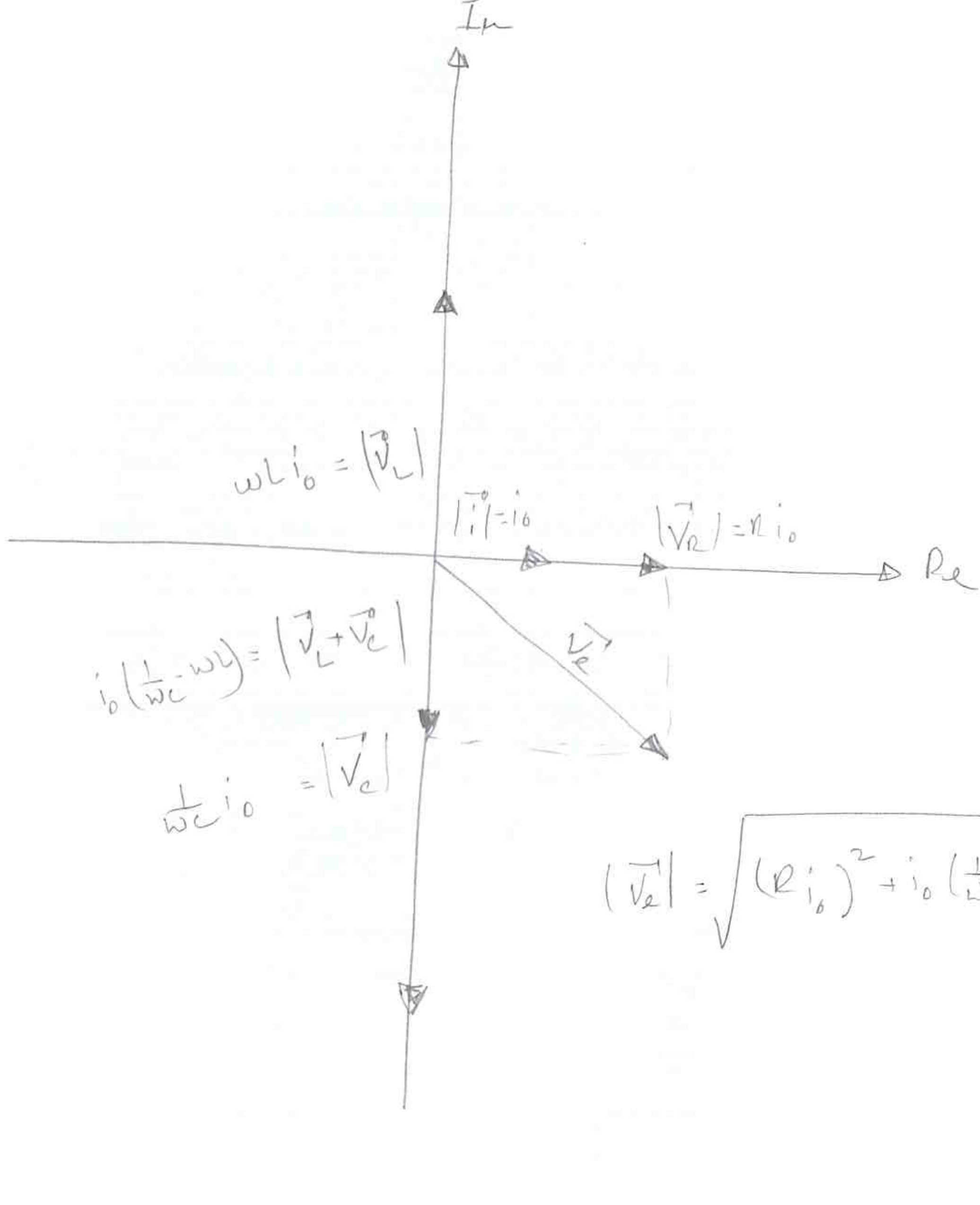
$$\begin{cases} f(\omega) = \dfrac{|\vec{V}_s|}{|\vec{V}_e|} = \dfrac{|\vec{V}_c|}{|\vec{V}_e|} = \dfrac{\frac{1}{\omega C}\cancel{i_0}}{\cancel{i_0}\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}} = \\[2ex] \quad = \dfrac{1}{\sqrt{(R\omega C)^2 + (1-\omega^2 LC)^2}} \\[2ex] \phi(\omega) = -tg^{-1}\left(\dfrac{R\cancel{i_0}}{\cancel{i_0}\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)}\right) = -tg^{-1}\left(\dfrac{R}{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)}\right) \end{cases}$$

(R = 0 CHEGAMOS AO RESULTADO DE ONTEM)


10
8
6
4
2
0
| Vs/Ve |
0
1
2
3
4
5
6
f / f0
R=0
R1
R2
R3
R3>R2>R1

SUPONHAMOS AGORA QUE A SAÍDA DO CIRCUITO É EM R





$$|\vec{V}_e| = \sqrt{(R i_0)^2 + i_0\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}$$

$$\begin{cases} f(\omega) = \dfrac{|V_s|}{|V_e|} = \dfrac{R\, i_0}{\sqrt{\left[(\omega L - \frac{1}{\omega C})\, i_0\right]^2 + (R\, i_0)^2}} = \dfrac{R\, \cancel{i_0}}{\cancel{i_0}\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \\[2em] \phi = + tg^{-1}\left(\dfrac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})\cancel{i_0}}{R\,\cancel{i_0}}\right) = tg^{-1}\left(\dfrac{1}{R}(\omega L - \frac{1}{\omega C})\right) \end{cases}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$\boxed{\omega = \omega_0}$

$$\begin{cases} f(\omega) = 1 \\ \phi(\omega) = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\omega \gg \omega_0}$

$(\omega L \gg \frac{1}{\omega C})$

$f(\omega) \to 0$

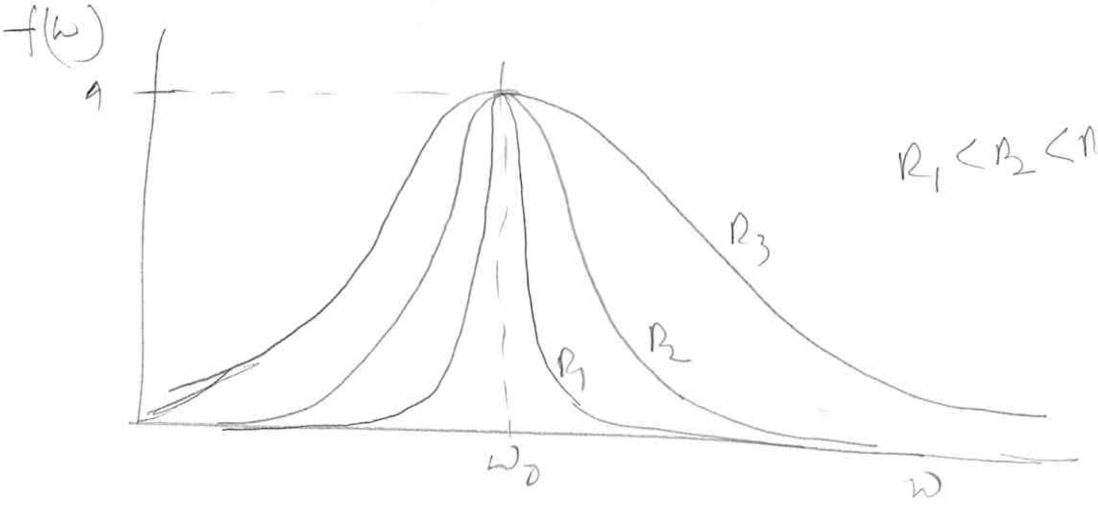
$\phi(\omega) \to -\pi/2$

$\boxed{\omega \ll \omega_0}$

$(\omega L \ll \frac{1}{\omega C})$

$f(\omega) \to 0$

$\phi(\omega) \to +\pi/2$



$R_1 < R_2 < R_3$

$\boxed{\text{PARA } \omega \gg \omega_0}$ $Z_T \simeq j\omega L$

(IMPEDÂNCIA ESSENCIALMENTE INDUTIVA
$\Rightarrow$ CORRENTE ATRASADA $\pi/2$ RELATIVAMENTE À TENSÃO DO GERADOR)

$\boxed{\text{PARA } \omega \ll \omega_0}$ $Z_T \simeq \dfrac{1}{j\omega C}$

(IMPEDÂNCIA ESSENCIALMENTE CAPACITIVA
$\rightarrow$ CORRENTE ADIANTADA $\pi/2$ RELATIVAMENTE À TENSÃO DO GERADOR)

O CIRCUITO LCR É PORTANTO UM FILTRO PASSA BANDA

VOLTEMOS A PENSAR NA RESSONÂNCIA:

QUAL É A POTÊNCIA DISSIPADA NA RESISTÊNCIA?

$$\begin{cases} v(t) = V_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t) \\ i(t) = \dfrac{V_0}{R} \operatorname{sen}(\omega_0 t) \end{cases} \quad (\text{pq } \phi = 0)$$

$$P(t) = \frac{V_0^2}{R} \operatorname{sen}^2(\omega_0 t)$$

$$\langle P(t) \rangle = \frac{V_0^2}{R} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x \, dx}_{\pi} = \frac{V_0^2}{2\cancel{\pi} R} \times \cancel{\pi} = \frac{V_0^2}{2R}$$

(É POR ISSO QUE SE USA NORMALMENTE O VALOR EFICAZ DA UMA TENSÃO ALTERNA $V_{ef.} = \dfrac{V_0}{\sqrt{2}}$

VALOR EFICAZ $\Leftrightarrow$ VALOR DA TENSÃO CONSTANTE QUE É EQUIVALENTE A UMA TENSÃO SINUSOIDAL COM VALOR DE PICO V_0 DO PONTO DE VISTA DA DISSIPAÇÃO DE POTÊNCIA NUMA RESISTÊNCIA

$$\boxed{V_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_0} \qquad \left(P = \frac{V_{ef}^2}{R} = \frac{V_0^2}{2R} \right)$$

PORTANTO: NUM CIRCUITO LCR A MÁXIMA POTÊNCIA QUE CONSIGO DISSIPAR NA RESISTÊNCIA É $\frac{V_p^2}{2R}$ E ISSO ACONTECE SEMPRE NA RESSONÂNCIA

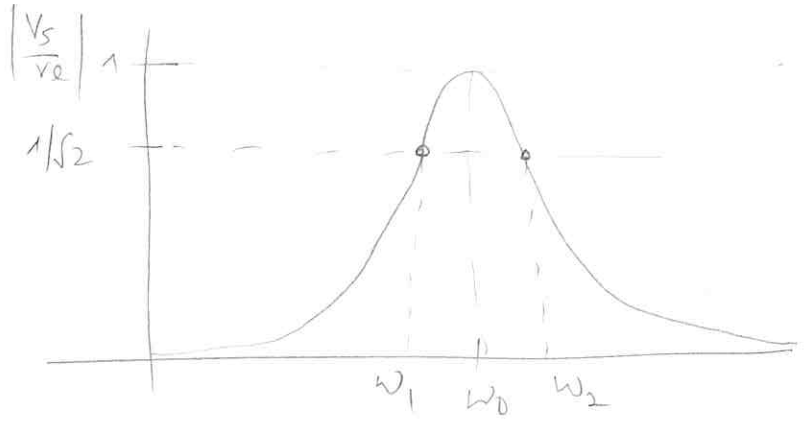
A QUE FREQUÊNCIAS ESTAREI A DISSIPAR METADE DESTA POTÊNCIA?

ou seja:

A QUE FREQUÊNCIAS A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO VALE $1/\sqrt{2}$?

$$P_{ot\ máx} = \frac{V_0^2}{2R}$$

$$\frac{1}{2} P_{ot\ máx} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{2R} = \frac{(V_0/\sqrt{2})^2}{2R} \Rightarrow \left|\frac{V_S(f)}{V_e(f)}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



W_1 e W_2 são as frequências que satisfazem

a equação:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{WRC}{\sqrt{(1-W^2LC)^2+(WRC)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+\left(WL-\frac{1}{WC}\right)^2}}$$

É FÁCIL MOSTRAR QUE:

$$W_1 = \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{W_0^2}}\right) - \frac{R}{2L}$$

$$W_2 = \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{W_0^2}}\right) + \frac{R}{2L}$$

CHAMA-SE LARGURA DE BANDA DO FILTRO A:

$$\Longrightarrow \quad B = W_2 - W_1 = \cancel{2}\,\frac{R}{\cancel{2}L} = \frac{R}{L}$$

DEFINE-SE AINDA O FACTOR DE QUALIDADE (Q) DESTE TIPO DE FILTRO, COMO SENDO:

$$\Longrightarrow \quad Q = \frac{W_0 L}{R}$$

(É DE FACTO A RAZÃO ENTRE A ENERGIA ARMAZENADA E A ENERGIA DISSIPADA NO FILTRO)

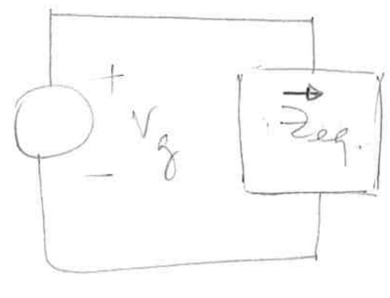
COMBINANDO AS DUAS EQUAÇÕES:

$$\boxed{\frac{Q}{w_0} = \frac{1}{B}}$$

∴ QUANTO MAIOR O FACTOR DE QUALIDADE DO FILTRO (MAIS SHARP É A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA) MENOR É A LARGURA DE BANDA

VAMOS AGORA PENSAR NA QUESTÃO!

SE EU LIGAR UM GERADOR A UMA REDE PASSIVA DE DOIS TERMINAIS QUE CONTENHA ELEMENTOS REACTIVOS E RESISTIVOS, EM GERAL, O QUE ACONTECE DO PONTO DE VISTA DA POTÊNCIA DISSIPADA NO DISPOSITIVO?



EM GERAL O DISPOSITIVO TERÁ UM $\vec{Z}_{eq}$ QUALQUER, O QUE QUER DIZER QUE $\vec{i}$ E $\vec{V}$ VÃO ESTAR RELACIONADOS PELA RELAÇÃO:

$$\vec{V} = \vec{Z}\,\vec{i}$$

Z SERÁ EM GERAL UMA IMPEDÂNCIA COMPLEXA, E DEPENDENDO DO SEU VALOR CONCRETO, VAI EXISTIR UMA DIFERENÇA DE FASE ENTRE A CORRENTE E A TENSÃO QUE PODE VARIAR NO INTERVALO $-\pi/2 < \varphi < +\pi/2$

SE EU ADMITIR QUE $V(t) = V_0 \operatorname{sen}(\omega t)$ ENTÃO A CORRENTE VAI SER DO TIPO $i_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$, O QUE QUER DIZER QUE A POTÊNCIA VAI ENVOLVER O PRODUTO

$$\operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

O RESULTADO DESTE PRODUTO DEPENDE DA DIFERENÇA DE FASE φ:

VER GRÁFICOS EXCEL E PENSAR NOS CASOS PARTICULARES:

$\boxed{\bullet \text{ DIFERENÇA DE FASE} = 0}$

$$\boxed{\langle P(t) \rangle = \frac{V_{ef}^2}{R_{eq.}} = R_{eq}\, i_{ef}^2}$$

RESULTADO EQUIVALENTE AO DE UMA RESISTÊNCIA → $\boxed{\text{REDE RESISTIVA}}$

$\boxed{\bullet \text{ DIFERENÇA DE FASE} = +\pi/2}$ (CORRENTE ADIANTADA $\pi/2$)

$\boxed{\text{REDE CAPACITIVA}}$

$\boxed{\langle P(t) \rangle = 0}$

A POTÊNCIA DISSIPADA NA REDE É NULA → 1/2 DO TEMPO A REDE RECEBE ENERGIA DO GERADOR E A OUTRA METADE É O GERADOR QUE RECEBE ENERGIA DA REDE

$\boxed{\bullet \text{ DIFERENÇA DE FASE} = -\pi/2}$ (CORRENTE ATRASADA DE $\pi/2$)

$\boxed{\text{REDE INDUTIVA}}$

$\boxed{\langle P(t) \rangle = 0}$ IDEM

MAS EM GERAL NÃO ACONTECERÁ NENHUMA DESTAS 3 SITUAÇÕES:

EXEMPLO $\varphi = \pi/4$

PARA ESTES DISPOSITIVOS DE DOIS TERMINAIS A POTÊNCIA É UMA GRANDEZA COMPLEXA:

(VEM DO FACTO DE ESTARMOS A TRABALHAR C/ SINUSÓIDES) – valor eficaz

$$\vec{P} = \frac{1}{2}\vec{V}\,\vec{i}^{*} \qquad (\vec{i}^{*} = \text{conjugado de } \vec{i})$$

E DEFINEM-SE 3 TIPOS DE POTÊNCIA

POTÊNCIA APARENTE:

$P_a = |\vec{P}|$ = POTÊNCIA APARENTE P_a QUE SE EXPRIME EM Volt Ampere (VA) E QUE CORRESPONDE À AMPLITUDE DO TERMO VARIÁVEL

$(P_a = V_{ef}\, i_{ef})$

POTÊNCIA ACTIVA: (OU POTÊNCIA ÚTIL É A QUE VAI SER ABSORVIDA PELO DISPOSITIVO)

$P = Re[\vec{P}]$ ≡ AO VALOR MÉDIO DA POTÊNCIA DISSIPADA NO DISPOSITIVO, E MEDE-SE EM WAT

$(P_{AT} = V_{ef}\, i_{ef} \cos\varphi)$

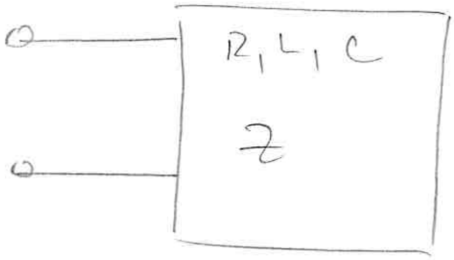
POTÊNCIA REACTIVA:

$P_R = Im[\vec{P}]$ ≡ MEDE-SE EM VA_R (VOLT-AMPERE REACTIVO)

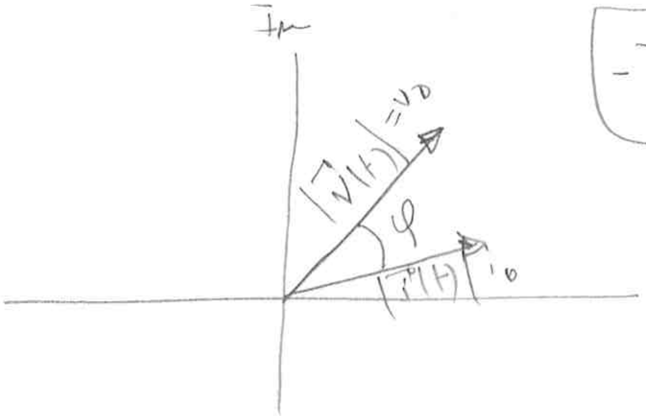
$(P_R = V_{ef}\, i_{ef} \operatorname{sen}\varphi)$

AO TERMO $\cos\varphi$ QUE INTERVÉM NA POTÊNCIA ACTIVA CHAMA-SE FACTOR DE POTÊNCIA

RESUMINDO, EM GERAL TEREMOS:



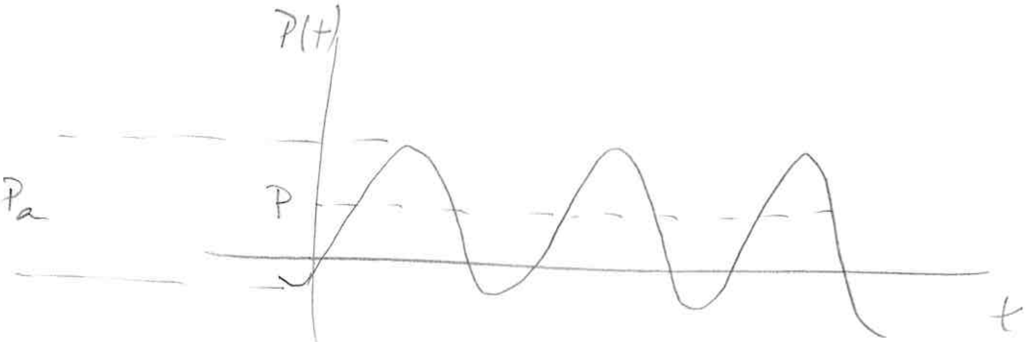
$$\boxed{Z = a + jb}$$



$$\boxed{-\pi/2 < \varphi < +\pi/2}$$

$$\boxed{\vec{P} = \frac{1}{2}\vec{V}\,\vec{I}^*}$$

O CÁLCULO DA POTÊNCIA INSTANTÂNEA ENVOLVE O PRODUTO $\sin(\omega t) \times \sin(\omega t + \varphi)$

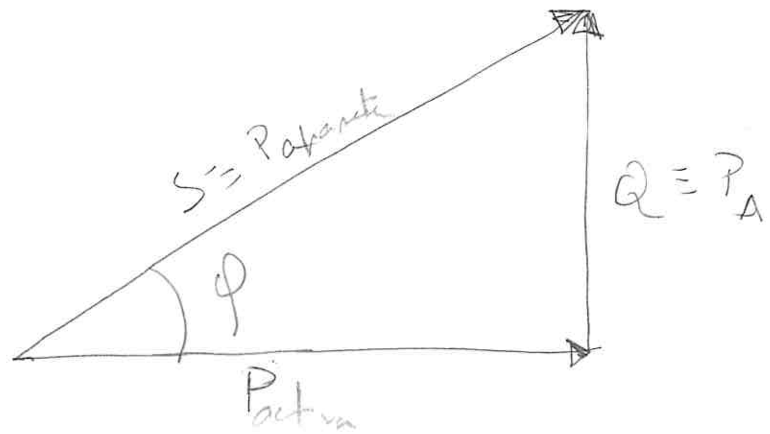


<u>POTÊNCIA APARENTE</u>: $P_a = |\vec{P}|$ ≡ AMPLITUDE DO TERMO VARIÁVEL (VA)

<u>POTÊNCIA ACTIVA</u>: $P = \mathrm{Re}[\vec{P}]$ ≡ VALOR MÉDIO DA POTÊNCIA

$$= V_{ef} \cdot i_{ef} \underbrace{\cos\varphi}_{\text{FACTOR DE POTÊNCIA}} \qquad (W)$$

<u>POTÊNCIA REACTIVA</u>: $P_R = \mathrm{Im}[\vec{P}]$ ≡ MEDE-SE EM VA_R



TRIÂNGULO DE POTÊNCIA

$S \equiv P_a = V_{ef} \cdot i_{ef}$

$P = V_{ef} \cdot i_{ef} \cos\varphi$

$Q \equiv P_a = V_{ef} \cdot i_{ef} \operatorname{sen}\varphi$